Sächsisches Landesseminar Mathematik 2015
Klausuraufgaben Klassenstufe 8
Sayda, 19. 03. 2015

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

1. Jeder von 41 Schülern einer Klasse hat an genau drei Mathematik-Olympiaden teilgenommen. Dabei erreichte jeder dieser Schüler je einmal einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis. Anton meint: „Allein auf Grund dieser Bestimmungen muss es in dieser Klasse mindestens sieben Schüler geben, bei denen die Reihenfolge der Platzierungen übereinstimmt.“ Bert meint dagegen nach einigem Nachdenken: „Es gibt sogar mindestens acht solcher Schüler.“

   Überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

   (*4 Punkte*)

2. Es seien a, b und c ganze Zahlen mit $7 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

   Beweise, dass dann ihr Produkt abc durch 7 teilbar ist.

   (*5 Punkte*)

3. In ein Quadrat werden beide Diagonalen eingezeichnet. (Siehe Abbildung 1.) Die vier Teildreiecke sollen alle mit Farben ausgemalt werden. Es sollen nur verschiedene Färbungen betrachtet werden, also Färbungen, die nicht durch Drehung aus einer anderen Figur entstehen.

   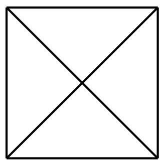

   Abbildung 1.

   Bestimme die Anzahl der verschiedenen Färbungen eines so unterteilten Quadrates, wenn man höchstens n verschiedene Farben verwendet.

   (*5 Punkte*)

4. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises k. Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Peripherie des Kreises und bewegen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien vom Punkt A zum Punkt B hin. Weiterhin ist bekannt, dass die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgt, wie die des Punktes P_2. (Siehe Abbildung 2.)

   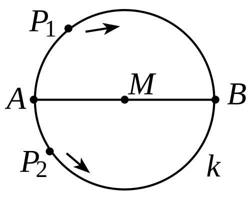

   Abbildung 2.

   Untersuche, ob es zwischen dem Start beider Punkte in A und der Ankunft von P_1 in B einen Zeitpunkt gibt, an dem die Dreiecke ABP_1 und ABP_2 den gleichen Flächeninhalt haben. Ist dies der Fall, dann ermittle für diesen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$.

   (*6 Punkte*)