Sächsisches Landesseminar Mathematik 2011
Klausuraufgaben Klassenstufe 11 / 12
Sayda, 17.03.2011

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Man finde das Minimum des Terms

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}$$

für positive reelle Zahlen a, b, c mit $a+b+c=1$ (einschließlich Beweis).

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Es seinen a und b zwei positive ganze Zahlen, für die $a>b$ gelten soll. Weiterhin werde vorausgesetzt, dass
$ggT(a-b, ab+1)=1$ und $ggT(a+b, ab-1)=1$ gilt.
Man beweise, dass dann $(a-b)^2+(ab+1)^2$ keine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Es sei I der Inkreismittelpunkt und O der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ΔABC (mit den üblichen Bezeichnungen) mit $60° < \alpha < 90°$ und $\overline{BC}=a$. Weiterhin soll $\overline{OI}$ parallel zu $\overline{BC}$ und $\overline{OI}=d$ gelten.
Berechne r und R in Abhängigkeit von a und d, wobei mit r der Inkreisradius und mit R der Umkreisradius des Dreiecks ΔABC bezeichnet werden soll.